Đại Học Quốc Gia TP.HCM
Trường Phổ Thông Năng Khiếu
Hội Đồng Tuyển Sinh

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
NĂM HỌC : 2015 - 2016
MÔN THI : TOÁN CHUYÊN
Thời gian làm bài 150 phút , không kể thời gian phát đề

Bài 1 (2.0đ) :

a) Giải phương trình : $\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}=2\sqrt{x-x^2}$

b) Cho các số a và b thỏa mãn điều kiện $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}$, chứng minh rằng $-1 \leqslant a < 0$.

Bài 2 (2.0đ) :

a) Tìm các số nguyên a,b,c sao cho $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca + 3 = 0$

b) Cho m là số nguyên , chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên a,b,c khác 0 sao cho $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca + 4m = 0$ thì cũng tồn tại các số nguyên a' , b' , c' khác 0 sao cho $a' + b' + c' = 0$ và $a'b' + b'c' + c'a' + m = 0$.

c) Với k là số nguyên dương , chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên a,b,c khác 0 sao cho $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca + 2^k = 0$.

Bài 3 (1.0đ) :

Giả sử phương trình $2x^2 + 2ax + 1 - b = 0$ có 2 nghiệm nguyên (với a,b là tham số) .
Chứng minh rằng $a^2 - b^2 + 2$ là số nguyên và không chia hết cho 3 .

Bài 4 (3.0đ) :

Cho tam giác ABC (AB < AC) có các góc nhọn , nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi M là trung điểm của cạnh BC , E là điểm chính giữa của cung nhỏ BC , F là điểm đối xứng của E qua M .

a) Chứng minh rằng : $EB^2 = EF.EO$

b) Gọi D là giao điểm của AE và BC , chứng minh rằng các điểm A,D,O,F cùng thuộc một đường tròn

c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và P là điểm thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC sao cho P,O,F không thẳng hàng . chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua 1 điểm cố định .

Bài 5 (2.0đ) :

Để khuyến khích phong trào học tập , một trường THCS đã tổ chức 8 đợt thi cho các học sinh , Ở mỗi đợt thi , có đúng 3 học sinh được chọn để trao giải . Sau khi tổ chức xong 8 đợt thi , người ta nhận thấy rằng với 2 đợt thi bất kỳ luôn có đúng 1 học sinh được trao giải ở cả 2 đợt thi đó .
Chứng minh rằng :

a) Có ít nhất 1 học sinh được trao giải ít nhất 4 lần .

b) Có đúng một học sinh được trao giải ở tất cả 8 đợt thi .

___ Hết ___

Thí sinh không được sử dụng tài liệu . Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm .

Họ và tên thí sinh : ....: Số báo danh :

BÀI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN PTNK NĂM 2015
(Lưu Văn Thám - thực hiện)

Bài 1 (2.0đ) :

a) Giải phương trình : $\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}=2\sqrt{x-x^2}$ (1)

ĐK : $\frac{1}{2}\le x\le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x-1} \\ b=\sqrt{1-2x^2} \end{cases}$ phương trình thành

$a+b=\sqrt{2(a^2+b^2)}\Leftrightarrow (a+b)^2=2(a^2+b^2)\Leftrightarrow (a-b)^2=0\Leftrightarrow a=b$

Vậy ta có: $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x^2}\Leftrightarrow 2x-1=1-2x^2\Leftrightarrow 2x^2+2x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \text{(nhan)} \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \text{(loai)} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm phương trình là $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Cách khác: *Sử dụng bất đẳng thức BCS ta có dấu "=" xảy ra* $\Rightarrow \sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x^2}$

b) Cho các số a và b thỏa mãn điều kiện $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}$, chứng minh rằng $-1\leqslant a<0$.

Ta có: $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}-\sqrt[3]{b}<0$. Ta chứng minh: $a\ge -1\Leftrightarrow \sqrt[3]{a}\ge -1\Leftrightarrow \sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}-\sqrt[3]{b}\ge -1$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}\ge \sqrt[3]{b}-1\Leftrightarrow b-\frac{1}{4}\ge b-3\sqrt[3]{b^2}+3\sqrt[3]{b}-1\Leftrightarrow 3(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{b}+\frac{1}{4})\ge 0\Leftrightarrow (\sqrt[3]{b}-\frac{1}{2})^2\ge 0$ (đúng)

Vậy $-1\leqslant a<0$ (đpcm)

Bài 2 (2.0đ) :

a) Tìm các số nguyên a,b,c sao cho a + b + c = 0 và ab + bc + ca + 3 = 0

Ta có $\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ca+3=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0 \\ ab+bc+ca=-3 \end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=6$

Do a, b, c $\in Z\Rightarrow a^2, b^2, c^2\in \{0;1;4\}\Rightarrow$ a, b, c $\in\{-2;-1;0;1;2\}$ mà a + b + c = 0 nên ta có:

$\left[\begin{array}{l} (a;b;c)=(2;-1;-1) \\ (a;b;c)=(-2;1;1) \end{array}\right.$ và các hoán vị

b) Cho m là số nguyên , chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên a,b,c khác 0 sao cho a + b + c = 0 và ab + bc + ca + 4m = 0 thì cũng tồn tại các số nguyên a' , b' , c' khác 0 sao cho a' + b' + c' = 0 và a'b' + b'c' + c'a' + m = 0 .

Nếu có a + b + c = 0 suy ra trong 3 số a, b, c có hai số lẻ một số chẵn hoặc cả 3 số cùng chẵn.

Nếu 2 số lẻ một số chẵn, không mất tính tổng quát nếu ta giả sử a, b chẵn; c lẻ

Khi đó a = 2a'+1, b = 2b' + 1, c = 2c' (a', b', c' $\in$ Z)

$\Rightarrow 0=a^2+b^2+c^2+4m=(2a'+1)^2+(2b'+1)^2+(2c')^2+4m=4(a'^2+a'+b'^2+b'+c'^2+m)+2$: không chia hết cho 4 mà 0 chia hết cho 4 – vô lý (loại)

Vậy cả 3 số đều chẵn. Ta chọn $a'=\frac{a}{2},\ b'=\frac{b}{2},\ c'=\frac{c}{2}\Rightarrow a'+b'+c'=\frac{1}{2}(a+b+c)=0$

Và ta cũng có a'b' + b'c' + c'a' + m = $\frac{ab+bc+ca}{4}+m=\frac{-4m}{4}+m=0$

vậy có số a', b', c' thỏa đề bài (đpcm)

c) Với k là số nguyên dương , chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên a,b,c khác 0 sao cho $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca + 2^k = 0$

Từ $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca + 2^k = 0$ tương tự câu a) ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 2.2^k = 2^{k+1}$

Do a, b, c nguyên và khác 0 nên $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \Rightarrow k \geq 2 \Rightarrow 2^k \vdots 4$

Vì $a + b + c = 0$ nên trong 3 số a, b, c có hai số lẻ một số chẵn hoặc cả 3 số cùng chẵn.

TH1: 2 số lẻ một số chẵn, không mất tính tổng quát nếu ta giả sử a, b chẵn; c lẻ

Khi đó $a = 2a'+1$, $b = 2b' + 1$, $c = 2c'$ ($a', b', c' \in Z$)

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (2a'+1)^2 + (2b'+1)^2 + (2c')^2 = 4(a'^2 + a' + b'^2 + b' + c'^2) + 2$: không chia hết cho 4 (loại)

TH2: Cả 3 số đều chẵn. Khi đó ta gọi p là số tự nhiên lớn nhất sao cho a, b, c cùng chia hết cho 2^p nghĩa là $a = a'.2^p$, $b = b'.2^p$, $c = c'.2^p$. (a' , b' , c' nguyên khác 0 và trong đò có ít nhất một số lẻ)

Khi đó ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 2^{k+1} \Leftrightarrow (a'^2 + b'^2 + c'^2)2^{2p} = 2^k \Leftrightarrow a'^2 + b'^2 + c'^2 = 2^{k-2p}$.

Tương tự trên do a', b', c' khác 0 nên $k - 2p \geq 2$ nên 2^{k-2p} chia hết cho 4

mà a' , b' , c' nguyên khác 0 và trong đò có ít nhất một số lẻ nên $a'^2 + b'^2 + c'^2$ không chia hết cho 4

nên trường hợp 2 cũng không xảy ra.

Vậy không tồn tại các số nguyên a,b,c khác 0 sao cho $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca + 2^k = 0$ (đpcm)

Bài 3 (1.0đ) :

Giả sử phương trình $2x^2 + 2ax + 1 - b = 0$ (1) có 2 nghiệm nguyên (với a,b là tham số) .

Chứng minh rằng $a^2 - b^2 + 2$ là số nguyên và không chia hết cho 3 .

Trước hết ta chứng minh số chính phương không thể chia 3 dư 2 (tự chứng minh) (*)

Giả sử $a^2 - b^2 + 2$ chia hết cho 3 $\Rightarrow a^2 - b^2 + 2 = 3n$ $(n \in Z) \Rightarrow a^2 = b^2 + 3n - 2$

(1) Có 2 nghiệm nguyên x_1 ; x_2 nên theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = -a \Rightarrow$ a nguyên

a, x nguyên (1) $\Rightarrow b = 2x^2 + 2ax + 1$ là số nguyên lẻ $\Rightarrow a^2 - b^2 + 2$ là số nguyên.

b là số nguyên lẻ suy ra b có dạng $b = 6m \pm 1$ hoặc $b = 6m + 3$ (m nguyên)

TH1: $b = 6m \pm 1$ $\Rightarrow a^2 = (6m \pm 1)^2 + 3n - 2 = 36m^2 \pm 12m + 1 + 3n - 2 = 3(12m^2 \pm 4m + n - 1) + 2$

suy ra a^2 chia 3 dư 2 - vô lý

TH2: $b = 6m + 3$: $a^2 = (6m + 3)^2 + 3n - 2 = 36m^2 + 36m + 9 + 3n - 2 = 3(12m^2 + 12m + n + 2) + 1$

(1) có 2 nghiệm nguyên $\Rightarrow \Delta'$ là số chính phương

mà $\Delta' = a^2 - 2(1 - b) = 3(12m^2 + 12m + n + 2) + 1 + 2(6m + 3) - 2 = 3(12m^2 + 16m + n + 3) + 2$

$\Rightarrow \Delta'$ chia 3 dư 2 nên cũng không thể là số chính phương

Vậy $a^2 - b^2 + 2$ là số nguyên và không chia hết cho 3 (đpcm)

Bài 4 (3.0đ) :

Cho tam giác ABC (AB < AC) có các góc nhọn , nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi M là trung điểm của cạnh BC , E là điểm chính giữa của cung nhỏ BC , F là điểm đối xứng của E qua M .

a) Chứng minh rằng : $EB^2 = EF.EO$

b) Gọi D là giao điểm của AE và BC , chứng minh rằng các điểm A,D,O,F cùng thuộc một đường tròn

c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và P là điểm thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC sao cho P,O,F không thẳng hàng . chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua 1 điểm cố định .

a) Xét hai tam giác cân BEF và OBE có hai góc ở đáy chung là OEB nên chúng đồng dạng, từ đây suy ra $EB^2=EF.EO$

b) Do Δ BDE đồng dạng Δ ABE nên từ câu a) suy ra $EB^2=ED.EA=EF.EO$, ta có đpcm

c) Ta có ^BIE = ^BAI + ^BIA = ^IAC + ^IBC = ^EBC + ^IBC = ^IBE ⇒ ΔEBI cân tại E ⇒ EI = EB = EC ⇒ E là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCI

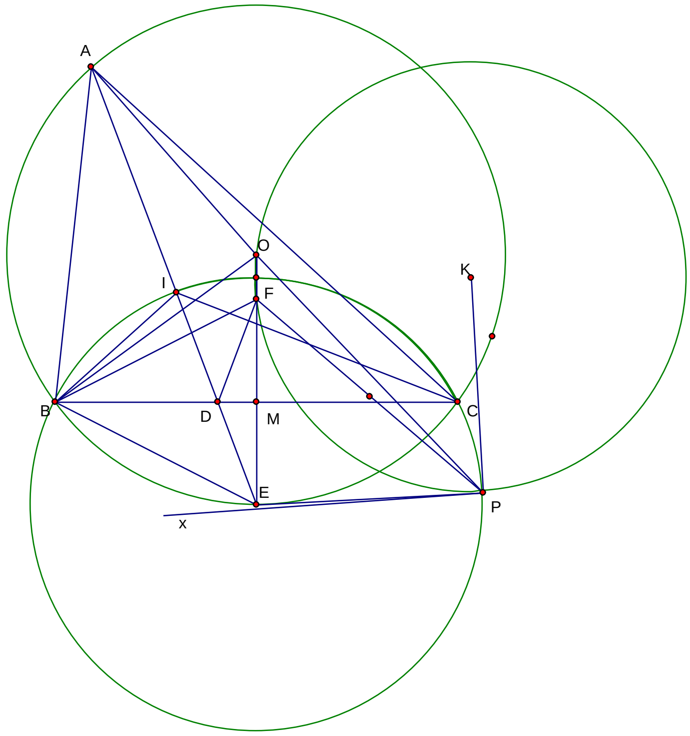
Do $EP^2 = EB^2 = EF.EO$ nên ΔEFP ~Δ EPO ⇒ ^FPE = ^POE (1)

Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔPFO.

Vẽ tiếp tuyến Px tiếp xúc với K tại P

$\Rightarrow\ FPx = \frac{1}{2}sdFP = FOP = EOP = FPE\ \Rightarrow$

Px trùng tia PE ⇒ Px qua E cố định (đpcm)



Bài 5 (2.0đ) :

Để khuyến khích phong trào học tập , một trường THCS đã tổ chức 8 đợt thi cho các học sinh , Ở mỗi đợt thi , có đúng 3 học sinh được chọn để trao giải . Sau khi tổ chức xong 8 đợt thi , người ta nhận thấy rằng với 2 đợt thi bất kỳ luôn có đúng 1 học sinh được trao giải ở cả 2 đợt thi đó . Chứng minh rằng :

a) Có ít nhất 1 học sinh được trao giải ít nhất 4 lần .

b) Có đúng một học sinh được trao giải ở tất cả 8 đợt thi .

Ta biểu thị mỗi học sinh bằng một điểm trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Ở mỗi đợt thi có đúng 3 học sinh được trao giải: ta nối 3 điểm biểu thị 3 học sinh đó bằng một tam giác (không nối hai điểm bất kỳ), 8 đợt trao giải ta có 8 tam giác. Hai đợt thi bất kỳ luôn có đúng 1 học sinh được trao giải ở cả 2 đợt thi đó tương ứng với hai tam giác bất kỳ có đúng một điểm chung.

a) Xét ΔABC bất kỳ trong 8 tam giác trên, vì 7 tam giác còn lại mỗi tam giác đều có một đỉnh chung với tam giác ABC, theo nguyên lý Dirichlet có ít nất một đỉnh của ΔABC là đỉnh chung với 3 trong 7 tam giác trên, cùng với ΔABC thì trong 3 điểm A. B, C có ít nhất một điểm là đỉnh chung của ít nhất 4 tam giác, tương ứng với điều này là có ít nhất một học sinh được trao giải ít nhất 4 lần (đpcm)

b) Không mất tính tổng quát ta giả sử A là đỉnh chung của 4 tam giác, ta chứng minh tất cả các tam giác đều nhận đỉnh A là đỉnh chung.

Xét ΔDEF bất kỳ nếu tam giác này không có đỉnh nào trùng với đỉnh A mà 4 tam giác đã có đỉnh chung là A mỗi tam giác đều có một đỉnh chung với ΔDEF điều này vô lý vì ΔDEF chỉ có 3 đỉnh mà 2 tam giác chỉ có đúng một đỉnh chung.

Vậy cả 8 tam giác đều có đỉnh chung là A, tương ứng với điều này là có đúng một học sinh được trao giải trao giải ở cả 8 đợt thi.
